Ondas electromagnéticas.

La notación compleja.
Considere una campo vectorial $\mathbf{F}(\boldsymbol{r}, t)$, que representa o el campo eléctrico o el campo magnético.

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(\boldsymbol{r},t)=\mathbf{F}(u_1,u_2,u_3,t) \\ &\mathbf{F}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{F}_1(u_1,u_2,u_3,t)\mathbf{1_{u1}}+\mathrm{F}_2(u_1,u_2,u_3,t)\mathbf{1_{u2}}+\mathrm{F}_3(u_1,u_2,u_3,t)\mathbf{1_{u3}} \end{aligned} \qquad 1$$

La dependencia del tiempo de $\mathbf{F}(\boldsymbol{r}, t)$ es armónica. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{r},t)&=F_1(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\theta_1)\mathbf{1_{u1}}+F_2(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\theta_2)\mathbf{1_{u2}}+F_3(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\theta_3)\mathbf{1_{u3}} \\ &=\mathrm{Re}\left\{\left[F_1(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\theta_1}\mathbf{1_{u1}}+F_2(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\theta_2}\mathbf{1_{u2}}+F_3(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\theta_3}\mathbf{1_{u3}}\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \\ &=\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{F}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \end{aligned} \qquad 2$$

donde el carácter de complejo de $\hat{\bar{F}}(\boldsymbol{r})$ está determinado por las fases θ_1, θ_2 y θ_3.

$$\rightarrow \mathbf{F}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{F}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$ cuando la dependencia con el tiempo es armónica.

Las ecuaciones de Maxwell en forma compleja.

$$\nabla\times\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \qquad 3$$

Se sustituye $\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$ por $\mathbf{E}(\boldsymbol{r}, t)$, etc. De esta manera se obtiene

$$\nabla\times\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\right]=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{B}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\right] \qquad 4$$

La ecuación (4) se puede expresar como

$$\begin{aligned} &\nabla\times\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\right]=-\left[\mathrm{Re}\left\{j\omega\hat{\bar{B}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\right] \\ &\rightarrow\mathrm{Re}\left\{\left[\nabla\times\hat{\bar{E}}(\boldsymbol{r})+j\omega\hat{\bar{B}}(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}=\mathbf{0} \\ &\rightarrow\nabla\times\hat{\bar{E}}(\boldsymbol{r})=-j\omega\hat{\bar{B}}(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \qquad 5$$

También, se tiene,

$$\nabla\times\hat{\bar{H}}(\boldsymbol{r})=j\omega\hat{\bar{D}}(\boldsymbol{r})+\hat{\bar{J}}(\boldsymbol{r}) \qquad 6$$

$$\nabla\cdot\hat{\bar{D}}(\boldsymbol{r})=\hat{\rho}_f \qquad 7$$

$$\nabla\cdot\hat{\bar{B}}(\boldsymbol{r})=0 \qquad 8$$

Las condiciones de borde son

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\hat{\overline{D}}_1(\boldsymbol{r})-\hat{\overline{D}}_2(\boldsymbol{r})\right)=\hat{\rho}_s \qquad 9$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\hat{\overline{B}}_1(\boldsymbol{r})-\hat{\overline{B}}_2(\boldsymbol{r})\right)=0 \qquad 10$$

$$\boldsymbol{n}\times\left(\hat{\overline{E}}_1(\boldsymbol{r})-\hat{\overline{E}}_2(\boldsymbol{r})\right)=\boldsymbol{0} \qquad 11$$

$$\boldsymbol{n}\times\left(\hat{\overline{H}}_1(\boldsymbol{r})-\hat{\overline{H}}_2(\boldsymbol{r})\right)=\hat{\overline{K}}_f \qquad 12$$

Potencia promedio.

El promedio en el tiempo de la potencia instantánea o “Potencia promedio” P se define como

$$\mathrm{P}=<P(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}P(t)\,dt=\frac{\text{Energía total}}{\text{Tiempo total}} \qquad 13$$

Para un sistema periódico con período τ_0, cuando la energía se suple o se consume de forma periódica,

$$\mathrm{P}=<P(t)>=\frac{1}{\tau_0}\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2}P(t)\,dt=\frac{\text{Energía total/ciclo}}{\text{Período}} \qquad 14$$

Utilidad: Tarifas en la cual se considera la energía total consumido (U) durante un intervalo de tiempo, T. $U = TP$

Promedio temporal del Teorema de Poynting – materiales lineales.
Recuerde el teorema de Poynting:

$$-\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s\,dV=\int_V \sigma|\boldsymbol{E}|^2\,dV+\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{\epsilon}{2}|\boldsymbol{E}|^2+\frac{\mu}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right)dV+\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\,\boldsymbol{a} \qquad 15$$

Se busca el promedio de cada término:

$$-<\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s\,dV>=<\int_V \sigma|\boldsymbol{E}|^2\,dV>+<\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{\epsilon}{2}|\boldsymbol{E}|^2+\frac{\mu}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right)dV>+<\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\,\boldsymbol{a}> \qquad 16$$

Intercambiando integrales,

$$-\int_V <\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s> dV = \int_V \sigma <|\boldsymbol{E}|^2> dV + \int_V <\frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon}{2}|\boldsymbol{E}|^2 + \frac{\mu}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right)> dV + \oint_S <(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})>\cdot d\,\boldsymbol{a} \qquad 17$$

Se puede demostrar que

$$<\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\hat{\overline{E}}\cdot\hat{\overline{J}}_s^*\} \qquad 18$$

$$\sigma <\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}> = \frac{\sigma}{2}\mathrm{Re}\{\hat{\overline{E}}\cdot\hat{\overline{E}}^*\} = \frac{\sigma}{2}\mathrm{Re}\{|\hat{\overline{E}^2}|\} \qquad 19$$

$$<\frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)> = \frac{d}{dt}\left[\frac{\epsilon}{4}\mathrm{Re}\{\hat{\overline{\overline{E}}}\cdot\hat{\overline{\overline{E}}}^*\}\right] = \frac{\epsilon}{4}\mathrm{Re}\{j\,2\,\omega\,\overline{\overline{E}}\cdot\overline{\overline{E}}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\} = 0 \qquad 20$$

$$<\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)> = \frac{\epsilon}{4}\mathrm{Re}\{j\,2\,\omega\,\hat{\overline{H}}\cdot\hat{\overline{H}}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\} = 0 \qquad 21$$

$$<(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{E}}\times\hat{\overline{H}}^*\right\} \qquad 22$$

De esta manera,

$$<\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s dV> = \int_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{E}}\cdot\hat{\overline{J}}_s^*\right\} dV \qquad 23$$

$$<\int_V \sigma|\hat{\overline{E}}|^2 dV> = \int_V \frac{\sigma}{2}|\hat{\overline{E}}|^2 dV \qquad 24$$

y

$$<\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\,\boldsymbol{a}> = \oint_S \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{E}}\times\hat{\overline{H}}^*\right\}\cdot d\,\boldsymbol{a} \qquad 25$$

El promedio temporal de teorema de Poynting queda, entonces,

$$-\int_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{E}}\cdot\hat{\overline{J}}_s^*\right\} = \int_V \frac{\sigma}{2}|\hat{\overline{E}}|^2 dV + \oint_S \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{E}}\times\hat{\overline{H}}^*\right\}\cdot d\,\boldsymbol{a} \qquad 24$$

El promedio en el tiempo de la tasa de incremento de la energía electromagnética es cero cuando los campos tienen un comportamiento armónico.

Conceptos básicos de la onda.
¿Qué es una onda? – Una pregunta no muy fácil de responder. Muchas veces la pregunta es desviada y en lugar de una respuesta concreta se describen fenómenos que poseen un comportamiento ondulatorio.
Pero una respuesta sería cualquier fenómeno físico o situación física que se propaga espacialmente y al mismo tiempo obedece a un comportamiento muy particular observado cuando las propiedades del medio cambian, o cuando obstáculos son interpuestos en sus trayectorias, o cuando varias ondas coinciden en la misma región del espacio, o sea, se habla de reflexión, refracción, dispersión, interferencia, etc.
Se reconoce la presencia de una onda en el espacio al observar cualquier perturbación del estado de equilibrio del sistema desplazándose espacialmente. La perturbación es originada por algún tipo de movimiento de materia, a nivel de electrones o moléculas que se transfiere de una región del espacio a otra.
En el movimiento de la onda se transfiere o propaga energía y/o momento (cantidad de movimiento) de la perturbación.
Matemáticamente una onda es cualquier situación física o fenómeno físico, que convenientemente descrita matemáticamente satisface la ecuación de onda.
El comportamiento y naturaleza de ondas depende de las propiedades del medio de propagación. En la ecuación de onda deben aparecer términos o coeficientes que describen éstas propiedades. Aquí se verán medios de propagación normales, o sea, determinístico, lineal, isotrópico y homogéneo.

Expresiones matemáticas de una onda.

(1) Onda espacialmente unidimensional propagándose sin deformación.
La expresión es

$$g(z,t)=f(z\mp vt) \qquad 25$$

En la ecuación (25) la situación física constante está propagándose en la dirección $\pm z$.
Si la onda se puede modelar por un campo vectorial, la ecuación (25) se convierte en

$$\overline{G}(z,t)=G(z,t)\mathbf{1}_w \qquad 26$$

(2) Onda plana uniforme (OPU) que se propaga sin deformación.
En este caso la expresión es

$$\zeta(x,y,z,t)=g(z,t) \qquad 27$$

La ecuación (27) representa una onda tridimensional que se propaga en dirección $\pm z$.
Para la onda vectorial,

$$\overline{Z}(x,y,z,t)=\overline{G}(z,t) \qquad 28$$

Las superficies $(z\mp vt)=$constante son superficies equifase. En este caso, las superficies equifases se desplazan a lo largo de $\pm z$ con velocidad v (velocidad de fase) y en todas esas superficies equifases las características de la onda son invariantes.

OPU que se propaga sin deformación en la dirección arbitraria, la fig. 1.

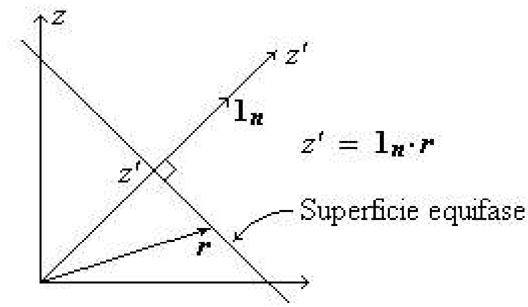

Figura 1.
La O. P. U. propagándose en dirección arbitraria

Aquí z' es la distancia de cualquier superficie equifase plana al origen, o sea, las superficies equifases estarán determinadas por $(z' \mp vt) = \text{ctte}$.
Importante: La dirección de propagación se indica por un vector unitario $\mathbf{1}_n$, perpendicular a la superficie equifase.
$\mathbf{1}_n$ = vector unitario perpendicular al plano equifase.

$$\mathbf{1}_n = n_x \mathbf{1}_x + n_y \mathbf{1}_y + n_z \mathbf{1}_z \rightarrow \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = 1 \qquad 29$$

$\boldsymbol{r}$ es el vector posición de un punto arbitrario sobre el plano equifase.

$$\boldsymbol{r} = x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z \qquad 30$$

La expresión general para la OPU que se propaga en dirección $\mathbf{1}_n$ con velocidad v es

$$\zeta(x, y, z, t) = f(z' \mp vt) = f(\mathbf{1}_n \cdot \boldsymbol{r} \mp vt) = f(n_x x + n_y y + n_z z \mp vt) \qquad 31$$

o

$$\overline{Z}(x, y, z, t) = \overline{F}(z' \mp vt) = \overline{F}(\mathbf{1}_n \cdot \boldsymbol{r} \mp vt) = \overline{F}(n_x x + n_y y + n_z z \mp vt) \qquad 32$$

Onda esférica que se propaga sin deformación.

$$\zeta(x, y, z, t) = \frac{1}{r} f(r \mp vt); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad 33$$

En este caso las superficies equifases son esferas definidas por $(r \mp vt) = \text{ctte}$.

Intensidad de una onda: Es la energía que fluye por unidad de tiempo a través de un área unitaria perpendicular a su dirección de propagación, o sea, la densidad superficial de flujo de potencia. Las ondas que se propagan en un medio sin pérdidas tiene la potencia constante. No quiere decir que la intensidad es constante. Por ejemplo considere una onda esférica: Coma el área crece con r^2, la densidad superficial de potencia debe *decrecer* con

r^2 para que el flujo de potencia sea constante. La intensidad I está relacionada con la amplitud A según $I \propto A^2$. Por consiguiente, I decrece linealmente con r.

La ecuación de onda.

Recordar: El comportamiento y naturaleza de la onda depende de las propiedades del medio de propagación y estas propiedades deben aparecer en la ecuación de onda. Pero la ecuación de onda muchas veces se da como

$$\nabla^2(\zeta)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad \text{- onda } \zeta \text{ escalar} \qquad 34$$

$$\nabla^2(\overline{Z})=\frac{1}{v^2}\frac{\partial \overline{Z}}{\partial t^2} \quad \text{- onda } \overline{Z} \text{ vectorial} \qquad 35$$

A veces se dice que estas ecuaciones (34) y (35) describen el movimiento de una onda que se propaga a través del espacio con velocidad definida y sin deformación. Se funden estas dos ideas en una sola: "Si una onda se propaga a través del espacio con velocidad definida y sin deformación, es porque el medio es normal, o sea, determinístico, lineal, isotrópico, homogéneo y sin pérdidas, por ejemplo, el vacío."
Las ecuaciones (34) y (35) describen ondas que se propagan en un medio normal. En este medio la onda se propaga sin deformación con una velocidad que depende sólo de la propiedades del medio. Si el medio no es normal, entonces la ecuación no será como las ecuaciones (34) o (35). Se averigua ahora si las ecuaciones vistas antes satisfacen la ecuación de onda.

(1) $g(z,t)=f(z\mp vt)$

$$\nabla^2(g)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}(g)=f''(z\mp vt)$$

$$\rightarrow\frac{\partial^2}{\partial z^2}(g)=[f''(z\mp vt)]v^2\rightarrow\nabla^2(g)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(g) \qquad 36$$

En las expresiones de (36), f' denota diferenciación con respecto a la variable entera $(z\mp vt)$.

(2) $\zeta(x,y,z,t)=f(z'\mp vt)=f(\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}\mp vt)=f(n_x x+n_y y+n_z z\mp vt)$

$$\nabla^2(\zeta)=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}=n_x^2 f''+n_y^2 f''+n_z^2 f''=\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)f''=f''$$

$$\rightarrow\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta)=f''v^2\rightarrow\nabla^2(\zeta)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta) \qquad 37$$

(3) $\zeta(x,y,z,t)=\frac{1}{r}f(r\mp vt) \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\nabla^2(\zeta)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}(\zeta)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}f\right)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-\frac{1}{r^2}f+\frac{1}{r}f'\right)\right)$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-f+rf'')=\frac{1}{r^2}(-f'+f'+rf'')=\frac{1}{f}f'' \qquad 38$$
$$\rightarrow\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta)=\left(\frac{1}{r}f''\right)v^2\rightarrow\nabla^2(\zeta)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta)$$

Ondas armónicas.

Un caso de interés:

$$f(z\mp vt)=A_0\cos[\beta(z\mp vt)] \text{ la figura 2.} \qquad 39$$

o

$$f(\mathbf{1}_n\cdot\boldsymbol{r}\mp vt)=A_0\cos[\beta(\mathbf{1}_n\cdot\boldsymbol{r}\mp vt)] \qquad 40$$

o

$$\frac{1}{r}f(r\mp vt)=\frac{A_0}{r}\cos\beta(r\mp vt) \qquad 41$$

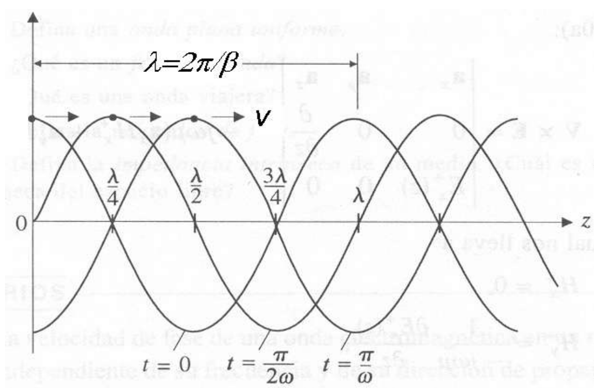

Figura 2
La O. P. U. armónica.

Espacialmente la perturbación posee un comportamiento armónico. El movimiento de la materia que produce una onda es armónico. Se ve $g(z, t)$ para $t = 0$, $\pi/2\omega$ y π/ω.
La constante de proporcionalidad β (rad m^{-1}) llamada la constante de fase es necesario para convertir longitudes a ángulos. A ver:

$$g(z,t)=A_0\cos[\beta(z\mp vt)]=A_0\cos[\phi(z,t)] \qquad 42$$

En la ecuación (41),

$$\phi(z,t)=\beta vt\pm\beta z \quad 43$$

Entonces para $z = z_0$ (z = ctte.)

$$\phi(z_0,t)=\beta(vt)\pm\beta z_0=\beta(vt)\pm\phi_0 \quad 44$$

El la ecuación (44) $\phi(z_0, t)$ crece cuando t crece.
Se ubica un observador en $z = z_0$ (metros). El observa que la fase de la onda cambia continuamente en el tiempo porque con respecto a él, la onda se está moviendo a lo largo del eje z con velocidad v. La constante de fase β, permite expresar este cambio de fase en función del desplazamiento efectuado por la onda.
La velocidad v = constante, o sea, cada vez que la onda avanza λ metros, el cambio de fase que el observador ve será de 2π (radianes), que implica que

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda} \text{ rad m}^{-1} \quad 45$$

Además,

$$\omega=\frac{d}{dt}[\phi(z_0,t)]=\frac{d}{dt}(\beta vt\pm\phi_0)=\beta v\rightarrow g(z,t)=A_o\cos(\omega t\mp\beta z) \quad 46$$

$$\omega=\beta v\rightarrow 2\pi f=\frac{2\pi}{\lambda}v\rightarrow v=f\lambda \quad 47$$

Si la onda tarda(1/f) segundos en recorrer λ metros, su velocidad es $\left(\frac{\lambda}{1/f}\right)=\lambda f$.
Si el observador se mueve en la misma dirección que la onda con igual velocidad v, él verá la misma fase siempre.

$$\rightarrow\frac{d}{dt}\phi[(z,t)]=0=\beta v\pm\beta\frac{dz}{dt}\rightarrow v=\mp\frac{dz}{dt} \quad 48$$

Se ve que $v < 0$ si la onda avanza en la dirección $+\mathbf{1}_z$.
La velocidad de la onda es la la velocidad de fase, también llamada la velocidad de propagación v.